Prevođenje programskih jezika – beleške sa predavanja Sintaksna analiza

Milan Banković

*Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Jesenji semestar 2023/24.

Pregled

Sintaksna analiza

Šta je cilj sintaksne analize?

Cilj sintaksne analize je da za datu reč $w \in \Sigma^*$ i datu gramatiku G konstruiše izvođenje reči w u gramatici G, ako postoji.

A šta je sa sintaksnim stablom?

- Kada odredimo izvođenje reči w u gramatici G, iz njega direktno možemo konstruisati i stablo izvođenja
- Iz stabla izvođenja možemo dobiti i stablo apstraktne sintakse

Otuda je najteži deo sintaksne analize upravo određivanje izvođenja date reči u gramatici. U ovoj lekciji prikazujemo osnovne pristupe ovom problemu.

Napomena

Sintaksna analiza se često naziva i parsiranje (engl. parsing). I mi ćemo u nastavku često koristiti ovaj izraz.

Levo parsiranje

Definicija 1

Metod parsiranja kod koga je cilj konstrukcija najlevljeg izvođenja date reči w u gramatici G naziva se levo parsiranje.

Levo parsiranje

Postupak levog parsiranja

- U svakom trenutku imamo tekuću rečeničnu formu oblika $uA\beta$ ($u \in \Sigma^*$, $\beta \in (\Sigma \cup N)^*$, tj. A je prvi neterminal sa leva)
  - na početku je to početna rečenična forma S' (početni simbol proširene gramatike: $S' \to S \dashv$)
- Ako je $u \neq \varepsilon$, tada je potrebno da i trenutni ulaz bude oblika uv (u suprotnom imamo sintaksnu grešku)
  - čitamo u sa ulaza i brišemo u sa početka rečenične forme, čime tekuća rečenična forma postaje $A\beta$
  - ovaj postupak predstavlja sinhronizaciju ulaza i tekuće rečenične forme
- Ako je $u = \varepsilon$, tj. ako je tekuća rečenična forma oblika $A\beta$, tada primenjujemo neko A-pravilo gramatike, npr. $A \to \gamma$, čime se tekuća rečenična forma transformiše u $\gamma\beta$
  - ovaj postupak predstavlja ekspanziju neterminala na osnovu pravila gramatike
- Postupak se završava ili kada nastupi sintaksna greška, ili kada se ulaz potpuno pročita (a rečenična forma potpuno sinhronizuje sa ulazom)

Primer

Primer

Neka je data gramatika izraza:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E + T \\ &\mid T \\ T &\longrightarrow T * F \\ &\mid F \\ F &\longrightarrow (E) \\ &\mid a \end{aligned}$$

i reč $a + a * a$. *Proširimo ovu gramatiku pravilom* $S \longrightarrow E \dashv$, *gde je* S *novi početni simbol. Najlevlje izvođenje za ulaz* $a + a * a \dashv$ *je:* $S \Longrightarrow E \dashv \Longrightarrow E + T \dashv \Longrightarrow T + T \dashv \Longrightarrow F + T \dashv \Longrightarrow a + T \dashv \Longrightarrow a + T * F \dashv \Longrightarrow a + F * F \dashv \Longrightarrow a + a * F \dashv \Longrightarrow a + a * a \dashv$. *Ovo izvođenje možemo rekonstruisati sa leva na desno na sledeći način:*

Tekuća rečenična forma	*Tekući ulaz*	*Primenjeno pravilo*
S	$a + a * a \dashv$	*početna forma*
$E \dashv$	$a + a * a \dashv$	$S \longrightarrow E \dashv$
$E + T \dashv$	$a + a * a \dashv$	$E \longrightarrow E + T$
$T + T \dashv$	$a + a * a \dashv$	$E \longrightarrow T$
$F + T \dashv$	$a + a * a \dashv$	$T \longrightarrow F$
$a + T \dashv$	$a + a * a \dashv$	$F \longrightarrow a$
$T \dashv$	$a * a \dashv$	*sinhronizacija*
$T * F \dashv$	$a * a \dashv$	$T \longrightarrow T * F$
$F * F \dashv$	$a * a \dashv$	$T \longrightarrow F$
$a * F \dashv$	$a * a \dashv$	$F \longrightarrow a$
$F \dashv$	$a \dashv$	*sinhronizacija*
$a \dashv$	$a \dashv$	$F \longrightarrow a$
ε	ε	*sinhronizacija*

Ovim je parsiranje uspešno rekonstruisano. Redosled primene pravila u najlevljem izvođenju (sa leva na desno) dat je u gornjoj tabeli (odozgo na dole).

Levo parsiranje i potisni automati

Levo parsiranje i potisni automati

Opisani postupak levog parsiranja se može simulirati pomoću standardnog potisnog automata pridruženog gramatici G:

- Tekuća rečenična forma se čuva na steku (najlevlji simbol rečenične forme je na vrhu steka)
- Početni simbol steka je početni simbol proširene gramatike
- Sinhronizacija ulaza sa prefiksom rečenične forme vrši se prelazima $(q_0, \varepsilon) \in \delta(q_0, a, a)$, za $a \in \Sigma$
- Ekspanzija najlevljeg neterminala A u tekućoj rečeničnoj formi po pravilu $A \longrightarrow \gamma$ vrši se prelazima $(q_0, \gamma) \in \delta(q_0, \varepsilon, A)$

Automat prepoznaje jezik praznim stekom. Redosled primenjenih pravila u najlevljem izvođenju se može rekonstruisati redosledom ekspanzionih prelaza u izračunavanju automata.

Primer

Primer

Vratimo se ponovo na proširenu gramatiku izraza iz prethodnog primera. Standardni automat za ovu gramatiku ima sledeće prelaze:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, S) &= \{(q_0, E\ \dashv)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, E) &= \{(q_0, E + T), (q_0, T)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, T) &= \{(q_0, T * F), (q_0, F)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, F) &= \{(q_0, (E)), (q_0, a)\} \\
\delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, (, () &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0,),)) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, +, +) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, *, *) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, \dashv, \dashv) &= \{(q_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Za reč $a + a * a$ imamo izračunavanje u automatu:
$(q_0, a + a * a\ \dashv, S) \vdash (q_0, a + a * a\ \dashv, E\ \dashv) \vdash (q_0, a + a * a\ \dashv, E + T\ \dashv) \vdash (q_0, a + a * a\ \dashv$
$, T + T\ \dashv) \vdash (q_0, a + a * a\ \dashv, F + T\ \dashv) \vdash (q_0, a + a * a\ \dashv, a + T\ \dashv) \vdash (q_0, +a * a\ \dashv, +T\ \dashv) \vdash$
$(q_0, a * a\ \dashv, T\ \dashv) \vdash (q_0, a * a\ \dashv, T * F\ \dashv) \vdash (q_0, a * a\ \dashv, F * F\ \dashv) \vdash (q_0, a * a\ \dashv, a * F\ \dashv) \vdash$
$(q_0, *a\ \dashv, *F\ \dashv) \vdash (q_0, a\ \dashv, F\ \dashv) \vdash (q_0, a\ \dashv, a\ \dashv) \vdash (q_0, \dashv, \dashv) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$.

Levo parsiranje

Važna primedba

S obzirom da se kod levog parsiranja najlevlje izvođenje rekonstruiše sa leva na desno, tome odgovara konstrukcija stabla izvođenja od korena ka listovima. Otuda se levo parsiranje često naziva i sintaksna analiza naniže (engl. top down parsing).

Desno parsiranje

Definicija 2

Metod parsiranja kod koga je cilj konstrukcija najdešnjeg izvođenja date reči w u gramatici G naziva se desno parsiranje.

Desno parsiranje

Postupak desnog parsiranja

- U svakom trenutku nam je poznat prefiks $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ tekuće rečenične forme koja je oblika αv, a na ulazu imamo nepročitani deo v polazne reči $w = uv \in \Sigma^*$.
  - drugim rečima, tekuća rečenična forma αv je podeljena na deo koji je otkriven i deo koji je ostao na ulazu
  - na početku imamo završnu rečeničnu formu w – njen otkriveni prefiks je $\alpha = \varepsilon$, a na ulazu je w
- ukoliko je $\alpha = \alpha'\gamma$, gde je γ desna strana pravila $A \longrightarrow \gamma$, tada se može primeniti redukcija: γ se zamenjuje sa A, čime otkriveni prefiks postaje $\alpha' A$, dok na ulazu ostaje v
  - primenom u pravom trenutku, redukcijom se postiže rekonstrukcija prethodne rečenične forme $\alpha' A v$ u najdešnjem izvođenju niske w, tj. rekonstruiše se korak $\alpha' A v \Longrightarrow^{nd} \alpha'\gamma v$ izvođenja
  - niska γ naziva se ručka rečenične forme $\alpha'\gamma v$
  - uzastopnim redukcijama se najdešnje izvođenje rekonstruiše sa desna u levo, sve dok se ne dostigne početna rečenična forma S
- ukoliko je $v = av'$, tada možemo primeniti prebacivanje: a prebacujemo na kraj otkrivenog prefiksa rečenične forme, tj. on postaje αa, a na ulazu ostaje v'
  - da bi mogla da se izvrši prava redukcija, potrebno je da dovoljno dugačak prefiks tekuće rečenične forme bude oktriven
  - upravo to se postiže čitanjem ulaza i prebacivanjem pročitanih simbola u otkriveni deo rečenične forme
- postupak se završava kada se ulaz potpuno pročita, a rečenična forma (koja je sada potpuno oktrivena) bude redukovana u početni simbol S gramatike

Primer

Primer

Neka je data gramatika izraza:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E + T \\ &\mid T \\ T &\longrightarrow T * F \\ &\mid F \\ F &\longrightarrow (E) \\ &\mid a \end{aligned}$$

i reč $a + a * a$. Proširimo ovu gramatiku pravilom $S \longrightarrow E \dashv$, gde je S novi početni simbol. Najdešnje izvođenje za ulaz $a + a * a \dashv$ je: $S \Longrightarrow E \dashv \Longrightarrow E + T \dashv \Longrightarrow E + T * F \dashv \Longrightarrow E + T * a \dashv \Longrightarrow E + F * a \dashv \Longrightarrow E + a * a \dashv \Longrightarrow T + a * a \dashv \Longrightarrow F + a * a \dashv \Longrightarrow a + a * a \dashv$.
Ovo izvođenje možemo rekonstruisati sa desna na levo na sledeći način:

Tekući otkriveni prefiks	*Tekući ulaz*	*Primenjeno pravilo (unazad)*
ε	$a + a * a \dashv$	*početna forma*
a	$+a * a \dashv$	*prebacivanje*
F	$+a * a \dashv$	*redukcija* $F \longrightarrow a$
T	$+a * a \dashv$	*redukcija* $T \longrightarrow F$
E	$+a * a \dashv$	*redukcija* $E \longrightarrow T$
$E+$	$a * a \dashv$	*prebacivanje*
$E + a$	$*a \dashv$	*prebacivanje*
$E + F$	$*a \dashv$	*redukcija* $F \longrightarrow a$
$E + T$	$*a \dashv$	*redukcija* $T \longrightarrow F$
$E + T*$	$a \dashv$	*prebacivanje*
$E + T * a$	$\dashv$	*prebacivanje*
$E + T * F$	$\dashv$	*redukcija* $F \longrightarrow a$
$E + T$	$\dashv$	*redukcija* $T \longrightarrow T * F$
E	$\dashv$	*redukcija* $E \longrightarrow E + T$
$E \dashv$	ε	*prebacivanje*
S	ε	*redukcija* $S \longrightarrow E \dashv$

Ovim je parsiranje uspešno rekonstruisano. Redosled primene pravila u najdešnjem izvođenju (sa desna na levo) dat je u gornjoj tabeli (odozgo na dole).

Desno parsiranje i potisni automati

Desno parsiranje i potisni automati

Opisani postupak desnog parsiranja se može simulirati pomoću standardnog proširenog potisnog automata pridruženog gramatici G:

- otkriveni prefiks se čuva na steku automata (na vrhu steka je najdešnji simbol ovog prefiksa)
- početni simbol steka je specijalni simbol $\perp$ (marker kraja steka)
- prebacivanje simbola a sa ulaza na stek vrši se prelazom $(q_0, a) \in \delta(q_0, a, \varepsilon)$
- redukcija po pravilu $A \longrightarrow \gamma$ vrši se prelazom $(q_0, A) \in \delta(q_0, \varepsilon, \gamma)$
- dodatni prelaz $(q_0, \varepsilon) \in \delta(q_0, \varepsilon, \perp S)$ omogućava pražnjenje steka nakon poslednje redukcije

Automat prepoznaje jezik praznim stekom. Redosled primenjenih pravila u najdešnjem izvođenju se može rekonstruisati unazad redosledom redukcionih prelaza u izračunavanju automata.

Primer

Primer

Vratimo se ponovo na proširenu gramatiku izraza iz prethodnog primera. Standardni prošireni automat za ovu gramatiku ima sledeće prelaze:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= \{(q_0, a)\} \\
\delta(q_0, (, \varepsilon) &= \{(q_0, ()\} \\
\delta(q_0,), \varepsilon) &= \{(q_0,))\} \\
\delta(q_0, +, \varepsilon) &= \{(q_0, +)\} \\
\delta(q_0, *, \varepsilon) &= \{(q_0, *)\} \\
\delta(q_0, \dashv, \varepsilon) &= \{(q_0, \dashv)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, E \dashv) &= \{(q_0, S)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, E + T) &= \{(q_0, E)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, T) &= \{(q_0, E)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, T * F) &= \{(q_0, T)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, F) &= \{(q_0, T)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, (E)) &= \{(q_0, F)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, a) &= \{(q_0, F)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, \perp S) &= \{(q_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Za reč $a + a * a$ *imamo izračunavanje u automatu:* $(q_0, a + a * a \dashv, \perp) \vdash (q_0, +a * a \dashv, \perp a) \vdash (q_0, +a * a \dashv, \perp F) \vdash (q_0, +a * a \dashv, \perp T) \vdash (q_0, +a * a \dashv, \perp E) \vdash (q_0, a * a \dashv, \perp E+) \vdash (q_0, *a \dashv, \perp E + a) \vdash (q_0, *a \dashv, \perp E + F) \vdash (q_0, *a \dashv, \perp E + T) \vdash (q_0, a \dashv, \perp E + T*) \vdash (q_0, \dashv, \perp E + T * a) \vdash (q_0, \dashv, \perp E + T * F) \vdash (q_0, \dashv, \perp E + T) \vdash (q_0, \dashv, \perp E) \vdash (q_0, \varepsilon, \perp E \dashv) \vdash (q_0, \varepsilon, \perp S) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$.

Desno parsiranje

Važna primedba

S obzirom da se kod desnog parsiranja najdešnje izvođenje rekonstruiše sa desna na levo, tome odgovara konstrukcija stabla izvođenja od listova ka korenu. Otuda se desno parsiranje često naziva i sintaksna analiza naviše (engl. bottom up parsing).

Determinizam

Kako postići determinizam?

- Prethodni postupci parsiranja (i pridruženi automati) su po pravilu nedeterministički
  - Kod analize naniže (levog parsiranja) problem je koje pravilo primeniti na neterminal na vrhu steka
  - Kod analize naviše (desnog parsiranja) često je moguće primeniti i redukciju i prebacivanje, ili dve različite redukcije (po različitim pravilima)
- Ove višeznačnosti se, na žalost, ne mogu uvek otkloniti, s obzirom da znamo da postoje nedeterministički kontekstno slobodni jezici
- Za odredjene klase gramatika (i jezika), nedeterminizam se može ukloniti korišćenjem preduvidnih simbola
  - drugim rečima, simboli koji slede na ulazu nam mogu pomoći da odlučimo koju ekspanziju (kod analize naniže), odnosno, koju redukciju ili prebacivanje (kod analize naviše) da primenimo
- Ključna pitanja:
  - kako utvrditi da li data gramatika omogućava determinističko parsiranje na ovaj način?
  - kako odrediti tablicu prelaska koja na osnovu preduvidnog simbola i simbola na vrhu steka određuje koji prelaz automata treba primeniti?
- Na ova pitanja odgovaramo u nastavku

Pregled

LL(1) gramatike

Pitanje na koje tražimo odgovor:

Koje uslove treba da zadovoljava gramatika da bi se parsiranje naniže moglo obaviti na deterministički način na osnovu jednog preduvidnog simbola?

- Nedeterminizam kod parsiranja naniže je posledica postojanja više pravila gramatike za isti neterminal A koji se nalazi na vrhu steka
- Potrebno je za svako pravilo $A \longrightarrow \gamma$ odrediti skup preduvidnih simbola iz Σ za koje je u izvođenju nalevo potrebno primeniti baš to pravilo

Definicija 3

Skup izbora za pravilo $A \longrightarrow \gamma$ (u oznaci $C(A \longrightarrow \gamma)$) je skup terminala $a \in \Sigma \cup \{\dashv\}$ takvih da postoji najlevlje izvođenje:

$$S \Longrightarrow^{nl,*} uA\beta \Longrightarrow u\gamma\beta \Longrightarrow^{nl,*} uav \in \Sigma^*$$

pri čemu je $u, v \in \Sigma^*$, $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup N)^*$.

Primedba

Da bi parsiranje bilo determinističko, za svaka dva različita A-pravila ovi skupovi moraju biti disjunktni (za svako $A \in N$).

LL(1) gramatike

Definicija 4

Gramatika $G = (\Sigma, N, S, P)$ *je* $LL(1)$ *akko za svaka dva pravila* $A \longrightarrow \gamma_1$ *i* $A \longrightarrow \gamma_2$ *sa istom levom stranom važi da je* $C(A \longrightarrow \gamma_1) \cap C(A \longrightarrow \gamma_2) = \varnothing$.

Primedba

Dakle, $LL(1)$ gramatike su one gramatike koje dopuštaju determinističko parsiranje naniže, koristeći jedan preduvidni simbol sa ulaza.

Definicija 5

Jezik L *je* $LL(1)$ *jezik ako postoji* $LL(1)$ *gramatika* G *takva da je* $L = L(G)$.

$LL(1)$ gramatike

Odlučivost

- Pitanje da li je gramatika $LL(1)$ je odlučivo i svodi se na izračunavanje skupova izbora (u nastavku ove lekcije)
- Pitanje da li je jezik $LL(1)$ je neodlučivo u opštem slučaju
  - ovo znači da ne postoji opšti postupak za transformaciju proizvoljne gramatike u $LL(1)$ gramatiku i/ili za ispitivanje da li je to uopšte moguće
- U praksi se mnoge gramatike koje nisu $LL(1)$ mogu transformisati u ekvivalentne $LL(1)$ gramatike primenom nekih uobičajenih transformacija:
  - eliminacija leve rekurzije, leva faktorizacija, ...
  - ovo, naravno, ne prolazi uvek, zato uvek treba nakon tih transformacija proveriti da li je dobijena gramatika $LL(1)$
- Postoje jezici koji nisu $LL(1)$, a jesu deterministički
  - Ovo znači da parsiranje naniže uz pomoć jednog preduvidnog simbola nije metod koji je dovoljno moćan da pokrije sve determinističke jezike

Skup $Prvi(\alpha)$

Definicija 6

Neka je data gramatika $G = (\Sigma, N, S, P)$ *i neka je* $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$. *Tada je:*

$$Prvi(\alpha) = \{a \in \Sigma \mid \alpha \Longrightarrow^* aw, w \in \Sigma^*\}$$

Algoritam

Skup $Prvi(\alpha)$ određujemo na sledeći način:

- ako je $\alpha = a \in \Sigma$, tada je $Prvi(\alpha) = \{a\}$
- ako je $\alpha = A \in N$, tada:
  - formiramo graf čiji su čvorovi iz $\Sigma \cup N$
  - grana od $A \in N$ do $X \in (\Sigma \cup N)$ će postojati akko postoji pravilo $A \longrightarrow \beta X \gamma$, pri čemu je β anulirajuća niska (tj. $\beta \Longrightarrow^* \varepsilon$, odnosno, β je ili ε ili se sastoji samo iz anulirajućih neterminala)
  - ako u grafu postoji put od $A \in N$ do $a \in \Sigma$, tada $a \in Prvi(A)$
- ako je $\alpha = X_1 X_2 \ldots X_n$ ($X_i \in (\Sigma \cup N)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$), i ako je X_k prvi simbol u nizu koji je ili terminal, ili neanulirajući neterminal, tada je $Prvi(\alpha) = Prvi(X_1) \cup Prvi(X_2) \cup \ldots \cup Prvi(X_k)$

Primer

Primer

Neka je data gramatika $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$. *Formiramo graf:*

```
S --> a
```

Grana postoji od S *do* a *zato što imamo pravilo* $S \longrightarrow aSb$. *Kako* a *nije anulirajući, to je i jedina grana iz* S. *Sada važi da je* $Prvi(S) = \{a\}$, *jer je* a *jedini terminal za koji postoji put u grafu od* S *do* a. *Dalje,* $Prvi(aSb) = \{a\}$, *jer je* a *terminal. Sa druge strane,* $Prvi(Sb) = \{a, b\}$, *jer je* $Prvi(S) = \{a\}$, *a kako je* S *anulirajući neterminal, tada je* $Prvi(Sb) = Prvi(S) \cup Prvi(b) = \{a, b\}$.

Skup *Sledi*(*A*)

Definicija 7

Neka je data gramatika $G = (\Sigma, N, S, P)$, *i neka je* $A \in N$. *Tada je:*

$$Sledi(A) = \{a \in \Sigma \mid S \Longrightarrow^* \alpha A a \gamma\}$$

gde su $\alpha, \gamma \in (\Sigma \cup N)^*$.

Algoritam

- Posmatramo proširenu gramatiku

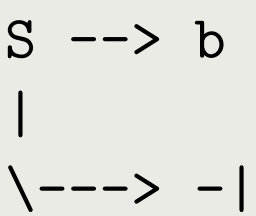
$$G' = (\Sigma \cup \{\dashv\}, N \cup \{S'\}, S', P \cup \{S' \longrightarrow S \dashv\})$$

  gramatike G
- Konstruišemo graf sa čvorovima iz $\Sigma \cup \{\dashv\} \cup N$:
  - Grana postoji od $A \in N$ do $b \in \Sigma \cup \{\dashv\}$, akko postoji pravilo $X \longrightarrow \alpha A \beta$ i $b \in Prvi(\beta)$
  - Grana postoji od $A \in N$ do $B \in N$, akko imamo pravilo $B \longrightarrow \alpha A \beta$, $\beta \Longrightarrow^* \varepsilon$
- Sada je $a \in \Sigma \cup \{\dashv\}$ u skupu $Sledi(A)$ akko postoji put od A do a u grafu

Primer

Primer

Posmatrajmo ponovo gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$ *(tj. njenu proširenu gramatiku koja uključuje i pravilo* $S' \longrightarrow S \dashv$*). Formiramo graf:*



Grana postoji od S *do* b *jer imamo pravilo* $S \longrightarrow aSb$*, a* $b \in Prvi(b)$*. Slično, postoji grana od* S *do* $\dashv$*, jer postoji pravilo* $S' \longrightarrow S \dashv$ *(u proširenoj gramatici), a* $\dashv \in Prvi(\dashv)$*. Sada je* $Sledi(S) = \{b, \dashv\}$*.*

Skup izbora

Teorema 1

$$C(A \longrightarrow \gamma) = \begin{cases} Prvi(\gamma), & \text{ako } \gamma \text{ nije anulirajući} \\ Prvi(\gamma) \cup Sledi(A), & \text{ako } \gamma \text{ jeste anulirajući} \end{cases}$$

Dokaz

Da bi postojalo najlevlje izvođenje $S \Longrightarrow^{nl,*} uA\beta \Longrightarrow u\gamma\beta \Longrightarrow^{nl,*} uav$, *potrebno je da bude* $S \Longrightarrow^{nl,*} uA\beta$, *kao i da* $a \in Prvi(\gamma\beta)$. *Ako* γ *nije anulirajuća niska, tada je* $Prvi(\gamma\beta) = Prvi(\gamma)$, *pa je* $C(A \longrightarrow \gamma) = Prvi(\gamma)$. *Sa druge strane, ako je* γ *anulirajuća, tada je* $Prvi(\gamma\beta) = Prvi(\gamma) \cup Prvi(\beta)$. *Pritom, treba razmatrati sve* β *za koje je* $S \Longrightarrow^{*} uA\beta$, *a unija skupova* $Prvi(\beta)$ *za takve* β *je upravo skup* $Sledi(A)$. *Otuda je* $C(A \longrightarrow \gamma) = Prvi(\gamma) \cup Sledi(A)$.

Primer

Primer

Vratimo se na gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$. *Skupovi izbora su:*

- $C(S' \longrightarrow S \dashv) = Prvi(S \dashv) = Prvi(S) \cup Prvi(\dashv) = \{a, \dashv\}$
- $C(S \longrightarrow aSb) = Prvi(aSb) = \{a\}$
- $C(S \longrightarrow \varepsilon) = Prvi(\varepsilon) \cup Sledi(S) = \varnothing \cup \{b, \dashv\} = \{b, \dashv\}$

Otuda je ova gramatika $LL(1)$, *jer je*
$C(S \longrightarrow aSb) \cap C(s \longrightarrow \varepsilon) = \varnothing$.

Tablica prelaska

Tablica prelaska

Tablica prelaska za $LL(1)$ analizu je tablica T u kojoj:

- svakom terminalu gramatike (uključujući i $\dashv$) odgovara jedna kolona
- svakom neterminalu (uključujući i S') odgovara jedna vrsta
- polja tablice T sadrže pravila gramatike:
  - polje $T[A, a]$ sadrži pravilo $A \longrightarrow \gamma$ akko je $a \in C(A \longrightarrow \gamma)$

Primedba

Ako je gramatika $LL(1)$, tada će svako polje tablice sadržati najviše jedno pravilo.

Primer

Primer

Tablica prelaska za LL(1) analizu za gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$ *je:*

	a	b	$\dashv$
S'	$S' \longrightarrow S \dashv$	-	$S' \longrightarrow S \dashv$
S	$S \longrightarrow aSb$	$S \longrightarrow \varepsilon$	$S \longrightarrow \varepsilon$

Algoritam $LL(1)$ analize

Algoritam

Inicijalno, na steku imamo početni simbol proširene gramatike S'. U svakom koraku primenjujemo sledeće:

- ako je na vrhu steka neterminal A, a preduvidni karakter je a, tada gledamo polje tablice $T[A, a]$:
  - ako postoji pravilo $A \longrightarrow \gamma \in T[A, a]$, tada simbol A na vrhu steka zamenjujemo sa γ; simbol a ostaje na ulazu
  - ako ne postoji pravilo u $T[A, a]$, prijavljujemo sintaksnu grešku
- ako je na vrhu steka terminal a, tada posmatramo šta je sledeći simbol na ulazu:
  - ako je sledeći simbol na ulazu a, tada uklanjamo a sa ulaza i sa vrha steka
  - ako je sledeći simbol na ulazu različit od a, tada prijavljujemo sintaksnu grešku
- ako se stek isprazni, tada je reč koja je pročitana sa ulaza prepoznata od strane automata

Primer

Primer

Vratimo se opet na gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$. *Posmatrajmo nisku aabb. Prepoznavanje ove niske se može prikazati sledećom tablicom:*

Stek	*Ulaz*	*Primenjeno pravilo*
S'	$aabb \dashv$	-
$S \dashv$	$aabb \dashv$	$S' \longrightarrow S \dashv$
$aSb \dashv$	$aabb \dashv$	$S \longrightarrow aSb$
$Sb \dashv$	$abb \dashv$	*sinhronizacija*
$aSbb \dashv$	$abb \dashv$	$S \longrightarrow aSb$
$Sbb \dashv$	$bb \dashv$	*sinhronizacija*
$bb \dashv$	$bb \dashv$	$S \longrightarrow \varepsilon$
$b \dashv$	$b \dashv$	*sinhronizacija*
$\dashv$	$\dashv$	*sinhronizacija*
ε	ε	*sinhronizacija*

Primer

Primer

Neka je data gramatika izraza:

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E + T \\ & | & T \\ T & \longrightarrow & T * F \\ & | & F \\ F & \longrightarrow & (E) \\ & | & a \end{array}$$

i reč $a + a * a$. Proširimo ovu gramatiku pravilom $S \longrightarrow E \dashv$, gde je S novi početni simbol. Ispitajmo da li je ova gramatika $LL(1)$. Odredimo najpre skupove Prvi i Sledi. Konstruišemo graf (primetimo da ni jedan od simbola E, T i F nije anulirajući):

```
Prvi:                          Sledi:

E --> T --> F --> (            F -->  T -->   E --> +
              |                       |        |
              \---> a                 \--> *   \--> )
                                                |
                                                \--> -|
```

Odavde je $Prvi(E) = Prvi(T) = Prvi(F) = \{(, a\}$. Dalje je $Sledi(E) = \{+,), \dashv\}$, $Sledi(T) = \{+,), \dashv, *\}$ i $Sledi(F) = \{+,), \dashv, *\}$. Otuda su skupovi izbora:

- $C(S \longrightarrow E \dashv) = Prvi(E) = \{(, a\}$
- $C(E \longrightarrow E + T) = Prvi(E) = \{(, a\}$, $C(E \longrightarrow T) = Prvi(T) = \{(, a\}$
- $C(T \longrightarrow T * F) = Prvi(T) = \{(, a\}$, $C(T \longrightarrow F) = Prvi(F) = \{(, a\}$
- $C(F \longrightarrow (E)) = \{(\}$, $C(F \longrightarrow a) = \{a\}$

Kako skupovi izbora za E-pravila (kao i za T-pravila) nisu disjunktni, gramatika nije $LL(1)$.

$LL(1)$ gramatike i leva rekurzija

Teorema 2

Gramatike koje sadrže levu rekurziju (posrednu ili neposrednu) nisu $LL(1)$.

Dokaz

Dokažimo teoremu za neposrednu levu rekurziju. Neka je gramatika neposredno levo rekurzivna po simbolu A, tj. neka postoji bar jedno levo rekurzivno A-pravilo, kao i bar jedno A-pravilo koje nije levo rekurzivno (koje sigurno postoji, ako je gramatika čista). Na primer, imamo $A \longrightarrow A\alpha \mid \beta$. Bez ograničenja opštosti, pretpostavimo da je bar jedan od skupova $Prvi(\beta)$ i $Prvi(\alpha)$ neprazan (u suprotnom bismo iz A mogli da izvedemo samo ε, pa bismo A mogli da izbacimo iz gramatike). Sada je $Prvi(\beta) \subseteq Prvi(A)$. Ako je $Prvi(\beta) \neq \varnothing$, tada je jasno da skupovi izbora za $A \longrightarrow A\alpha$ i $A \longrightarrow \beta$ nisu disjunktni. Ako je $Prvi(\beta) = \varnothing$, to je moguće samo ako je β anulirajuća niska. Međutim, tada je i A anulirajući simbol, pa skup izbora za $A \longrightarrow A\alpha$ sadrži i simbole iz $Prvi(\alpha)$. Kako skup izbora za $A \longrightarrow \beta$ sadrži skup $Sledi(A)$, a $Prvi(\alpha) \subseteq Sledi(A)$, sledi da skupovi izbora za ova dva pravila imaju $Prvi(\alpha)$ u preseku. Kako je ovaj skup po pretpostavci neprazan, sledi da gramatika ne može biti $LL(1)$.

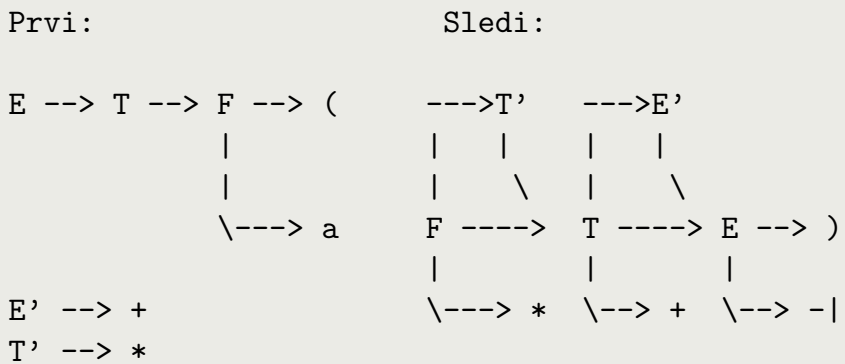
Primer

Primer

Iz prethodne teoreme je jasno zbog čega prethodna gramatika izraza nije bila $LL(1)$. Prvi pokušaj transformacije ove gramatiku u ekvivalentnu $LL(1)$ gramatiku bi podrazumevao eliminaciju leve rekurzije, pri čemu dobijamo sledeću gramatiku:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow TE' \\ E' &\longrightarrow +TE' \mid \varepsilon \\ T &\longrightarrow FT' \\ T' &\longrightarrow *FT' \mid \varepsilon \\ F &\longrightarrow (E) \\ &\quad \mid a \end{aligned}$$

Odredimo skupove Prvi i Sledi za neterminale ove gramatike (anulirajući simboli su E' i T'):



Odavde je $Prvi(E) = Prvi(T) = Prvi(F) = \{(, a\}$, $Prvi(E') = \{+\}$, $Prvi(T') = \{*\}$, $Sledi(E) = Sledi(E') = \{), \dashv\}$, $Sledi(T) = Sledi(T') = \{+,), \dashv\}$ i $Sledi(F) = \{*, +,), \dashv\}$.

Primer

Primer

(nastavak) Sada imamo sledeće skupove izbora:

- $C(S \longrightarrow E \dashv) = Prvi(E) = \{(, a\}$
- $C(E \longrightarrow TE') = Prvi(T) = \{(, a\}$
- $C(E' \longrightarrow +TE') = \{+\}$, $C(E' \longrightarrow \varepsilon) = Sledi(E') = \{), \dashv\}$
- $C(T \longrightarrow FT') = Prvi(F) = \{(, a\}$
- $C(T' \longrightarrow *FT') = \{*\}$, $C(T' \longrightarrow \varepsilon) = Sledi(T') = \{+,), \dashv\}$
- $C(F \longrightarrow (E)) = \{(\}$, $C(F \longrightarrow a) = \{a\}$

Odavde sledi da gramatika jeste $LL(1)$. Tablica prelaska za ovu gramatiku izgleda ovako:

	a	$($	$)$	$+$	$*$	$\dashv$
S	$S \longrightarrow E \dashv$	$S \longrightarrow E \dashv$	-	-	-	-
E	$E \longrightarrow TE'$	$E \longrightarrow TE'$	-	-	-	-
E'	-	-	$E' \longrightarrow \varepsilon$	$E' \longrightarrow +TE'$	-	$E' \longrightarrow \varepsilon$
T	$T \longrightarrow FT'$	$T \longrightarrow FT'$	-	-	-	-
T'	-	-	$T' \longrightarrow \varepsilon$	$T' \longrightarrow \varepsilon$	$T' \longrightarrow *FT'$	$T' \longrightarrow \varepsilon$
F	$F \longrightarrow a$	$F \longrightarrow (E)$	-	-	-	-

Primer

Primer

(nastavak) Izvođenje niske $a + a * a$ je dato sledećom tabelom:

Stek	*Ulaz*	*Primenjeno pravilo*
S	$a + a * a \dashv$	-
$E \dashv$	$a + a * a \dashv$	$S \longrightarrow E \dashv$
$TE' \dashv$	$a + a * a \dashv$	$E \longrightarrow TE'$
$FT'E' \dashv$	$a + a * a \dashv$	$T \longrightarrow FT'$
$aT'E' \dashv$	$a + a * a \dashv$	$F \longrightarrow a$
$T'E' \dashv$	$+a * a \dashv$	*sinhronizacija*
$E' \dashv$	$+a * a \dashv$	$T' \longrightarrow \varepsilon$
$+TE' \dashv$	$+a * a \dashv$	$E' \longrightarrow +TE'$
$TE' \dashv$	$a * a \dashv$	*sinhronizacija*
$FT'E' \dashv$	$a * a \dashv$	$T \longrightarrow FT'$
$aT'E' \dashv$	$a * a \dashv$	$F \longrightarrow a$
$T'E' \dashv$	$*a \dashv$	*sinhronizacija*
$*FT'E' \dashv$	$*a \dashv$	$T' \longrightarrow *FT'$
$FT'E' \dashv$	$a \dashv$	*sinhronizacija*
$aT'E' \dashv$	$a \dashv$	$F \longrightarrow a$
$T'E' \dashv$	$\dashv$	*sinhronizacija*
$E' \dashv$	$\dashv$	$T' \longrightarrow \varepsilon$
$\dashv$	$\dashv$	$E' \longrightarrow \varepsilon$
ε	ε	*sinhronizacija*

Primer

Primer

Posmatrajmo gramatiku:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow (L) \mid a \\ L &\longrightarrow S\ L \mid S \end{aligned}$$

Ova gramatika nema levu rekurziju. Ispitajmo da li je $LL(1)$*. Lako se vidi da je* $Prvi(L) = Prvi(S) = \{(, a\}$*, kao i da je* $Sledi(L) = \{)\}$ *i* $Sledi(S) = Prvi(L) \cup Sledi(L) \cup \{\dashv\} = \{(, a,), \dashv\}$*. Skupovi izbora su:*

- $C(S' \longrightarrow S \dashv) = Prvi(S) = \{(, a\}$
- $C(S \longrightarrow (L)) = \{(\}$, $C(S \longrightarrow a) = \{a\}$
- $C(L \longrightarrow S\ L) = Prvi(S) = \{(, a\}$,
  $C(L \longrightarrow S) = Prvi(S) = \{(, a\}$

Gramatika nije $LL(1)$ *jer skupovi izbora za L-pravila nisu disjunktni.*

$LL(1)$ gramatike i leva faktorisanost

Teorema 3

Gramatika koja je levo faktorisana nije $LL(1)$.

Dokaz

Leva faktorisanost znači da postoje neka dva pravila $A \longrightarrow \alpha\beta_1$ i $A \longrightarrow \alpha\beta_2$ koja dele zajednički prefiks α. Kao i u prethodnoj teoremi, bez ograničenja opštosti, pretpostavimo da je $Prvi(\alpha) \neq \varnothing$. Jasno je da će $Prvi(\alpha)$ biti sadržan u oba skupa izbora, pa gramatika nije $LL(1)$.

Primer

Primer

Posmatrajmo ponovo gramatiku iz prethodnog primera. Eliminacijom leve faktorisanosti, dobijamo gramatiku:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & (L) \mid a \\ L & \longrightarrow & S\ X \\ X & \longrightarrow & L \mid \varepsilon \end{array}$$

Sada je $Prvi(S) = Prvi(L) = Prvi(X) = \{a, (\}$, *a* $Sledi(L) = Sledi(X) = \{)\}$, *a* $Sledi(S) = \{\dashv\} \cup Prvi(X) \cup Sledi(L) = \{\dashv, a, (,)\}$. *Skupovi izbora su:*

- $C(S' \longrightarrow S \dashv) = Prvi(S) = \{a, (\}$
- $C(S \longrightarrow (L)) = \{(\}$, $C(S \longrightarrow a) = \{a\}$
- $C(L \longrightarrow S\ X) = Prvi(S) = \{a, (\}$
- $C(X \longrightarrow L) = Prvi(L) = \{a, (\}$, $C(X \longrightarrow \varepsilon) = Sledi(X) = \{)\}$

Sada je gramatika $LL(1)$.

Primer

Primer

(nastavak) Tablica prelaska za prethodni primer je:

	a	$($	$)$	$\dashv$
S'	$S' \longrightarrow S \dashv$	$S' \longrightarrow S \dashv$	-	-
S	$S \longrightarrow a$	$S \longrightarrow (L)$	-	-
L	$L \longrightarrow S\ X$	$L \longrightarrow S\ X$	-	-
X	$X \longrightarrow L$	$X \longrightarrow L$	$X \longrightarrow \varepsilon$	-

Primer

Primer

Iz prethodnih primera, može se pogrešno zaključiti da su jedini uzroci problema kod $LL(1)$ *analize leva rekurzija i leva faktorisanost, te da se eliminacijom ovih pojava uvek dobija* $LL(1)$ *gramatika. Pokažimo da to nije tačno. Posmatrajmo gramatiku:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aAaa \mid bAba \\ A &\longrightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Ova gramatika nema ni levu rekurziju, ni levu faktorisanost. Da li je $LL(1)$*? Lako se vidi da je* $Prvi(S) = \{a, b\}$*,* $Prvi(A) = \{b\}$*,* $Sledi(S) = \{\dashv\}$ *i* $Sledi(A) = \{a, b\}$*. Sada imamo skupove izbora:*

- $C(S' \longrightarrow S \dashv) = Prvi(S) = \{a, b\}$
- $C(S \longrightarrow aAaa) = \{a\}$, $C(S \longrightarrow bAba) = \{b\}$
- $C(A \longrightarrow b) = \{b\}$, $C(A \longrightarrow \varepsilon) = Sledi(A) = \{a, b\}$

Odavde sledi da gramatika nije $LL(1)$*, jer skupovi izbora za A-pravila nisu disjunktni.*

Rekurzivni spust

Rekurzivni spust

- Jedan način implementacije $LL(1)$ parsera je da se simulira rad odgovarajućeg potisnog automata (tj. algoritam sa slajda 29), uz eksplicitnu implementaciju tablice prelaska
- Jednostavniji način je da se koristi rekurzivna implementacija poznata i kao rekurzivni spust:
  - za svaki neterminal imamo posebnu funkciju (obično nazvanu kao i sam neterminal)
  - imamo i globalnu promenljivu *token* koja sadrži pročitani preduvidni token
  - parsiranje se započinje čitanjem prvog preduvidnog simbola i pozivom funkcije $S()$ (gde je S početni simbol proširene gramatike)
  - funkcija $A()$ za proizvoljni neterminal A će na osnovu vrednosti promenljive *token* odlučiti koje A pravilo da primeni
  - desna strana odabranog pravila će se obrađivati sa leva na desno:
    - ako je sledeći simbol desne strane terminal, moraće da bude isti kao pročitani preduvid; tada čitamo sledeći preduvid i nastavljamo dalje; u suprotnom prijavljujemo grešku
    - ako je sledeći simbol desne strane neterminal X, pozivaće se funkcija $X()$
  - parsiranje se završava kada se vratimo iz poziva $S()$

Primer

Primer

Implementacija parsera zasnovanog na rekurzivnom spustu za gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$ *je data u nastavku:*

```
int token;
void parse()
{
   token = next_token();
   if(Sp())    // S'
     printf("Success\n");
   else
     printf("Error\n");
}
```

Primer

Primer

```
int Sp()
{
   if(token == a_token || token == eof_token)
   {
      S();  // S
      return token == eof_token;  // -|
   }
   else    // b_token
     return 0;
}
```

Primer

Primer

```
int S()
{
  if(token == a_token)
   {
     token = next_token();   // a
     if(!S())              // S
       return 0; // greska
     if(token != b_token)    // b
       return 0; // greska
     token = next_token();
   }
  else if(token == b_token || token == eof_token)
   {
      // epsilon
   }
  return 1;
}
```

Ograničenja analize naniže

Napomene

- Umesto jednog, u teoriji se razmatra i korišćenje više od jednog preduvidnog simbola
- Gramatike koje dopuštaju deterministično parsiranje naniže uz pomoć k preduvidnih simbola nazivaju se $LL(k)$ gramatike
- Jezici koji se mogu opisati $LL(k)$ gramatikama se nazivaju $LL(k)$ jezici
- Važi: $LL(1) \subsetneq LL(2) \subsetneq \ldots \subsetneq LL(k) \subsetneq \ldots \subsetneq DKS$, gde je DKS klasa svih determinističkih kontekstno slobodnih jezika
- Dakle, analiza naniže nije dovoljno moćna da obezbedi deterministično parsiranje svih determinističkih kontekstno slobodnih jezika!!

Pregled

Ručke

Definicija 8

Neka je dato najdešnje izvođenje: $S \Longrightarrow^{nd,*} \alpha A w \Longrightarrow^{nd} \alpha\beta w$, $(w \in \Sigma^*, \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*)$. *Tada se reč* β *naziva ručka rečenične forme* $\alpha\beta w$.

Napomena

Dakle, ručka je deo tekuće rečenične forme koji je nastao poslednjim primenjenim pravilom u najdešnjem izvođenju.

Primer

U sledećem najdešnjem izvođenju, ručke su označene crvenom bojom:
$E' \Longrightarrow E\dashv \Longrightarrow E+T\dashv \Longrightarrow E+T*F\dashv \Longrightarrow E+T*a\dashv \Longrightarrow E+F*a\dashv \Longrightarrow E+a*a\dashv \Longrightarrow T+a*a\dashv \Longrightarrow F+a*a\dashv \Longrightarrow a+a*a\dashv$.

Primer

Slično, za izvođenje: $S' \Longrightarrow S\dashv \Longrightarrow aSb\dashv \Longrightarrow aaSbb\dashv \Longrightarrow aa\varepsilon bb\dashv$

Ključno pitanje

- Kako, idući sa desna u levo u ovim izvođenjima, prepoznavati ručke na deterministički način?

$LR(1)$ gramatike

Definicija 9

Gramatika je $LR(1)$ akko je tokom parsiranja naviše u svakom koraku na osnovu jednog preduvidnog simbola moguće jednoznačno odrediti da li je potrebno izvršiti prebacivanje ili redukciju, kao i po kom pravilu se redukcija vrši.

Napomena

Ova definicija je neformalna, ali dobro izražava suštinu. Za formalnu definiciju, pogledati knjigu profesora Vitasa.

Definicija 10

Jezik je $LR(1)$ jezik ako postoji $LR(1)$ gramatika koja ga generiše.

$LR(1)$ gramatike

Odlučivost

- Kao i kod LL-jezika, i ovde je pitanje da li je data gramatika $LR(1)$ odlučivo, ali pitanje da li je jezik $LR(1)$ nije!
  - dakle, ni ovde ne postoji opšti postupak za transformaciju proizvoljne gramatike u ekvivalentnu $LR(1)$ gramatiku ili utvrđivanja da takva gramatika ne postoji
  - sa druge strane, postoji opšti postupak za ispitivanje da li je data gramatika $LR(1)$ i formiranje odgovarajućeg determinističkog proširenog automata, ako jeste
- Kao i kod LL-jezika, i ovde je moguće razmatrati i $LR(k)$ gramatike:
  - ipak, ovde se ispostavi da važi $LR(1) = LR(2) = \ldots = LR(k) = \ldots = DKS$
  - dakle, analiza naviše omogućava da se uz pomoć samo jednog preduvidnog simbola deterministički parsiraju svi deterministički kontekstno slobodni jezici

$SLR(1)$ gramatike

$SLR(1)$ gramatike

- U opštem slučaju, postupak formiranja determinističkog parsera za proizvoljne $LR(1)$ gramatike je prilično složen
  - Postoji objašnjen u knjizi profesora Vitasa, kao i u Aho-Ulman-u
- Često se razmatraju neke podklase $LR(1)$ gramatika za koje je ovaj postupak značajno jednostavniji, a koje su i dalje dovoljno izražajne da pokriju većinu praktičnih primena
- Jedna takva podklasa je i $SLR(1)$ klasa gramatika (*simple* $LR(1)$)
  - mi ćemo se, u nastavku, baviti isključivo ovom klasom gramatika

Konačni autotomat za $SLR(1)$ analizu

Definicija 11

Ajtem je pravilo oblika $A \longrightarrow \alpha.\beta$, gde je $A \longrightarrow \alpha\beta$ pravilo gramatike G. Simbol . je oznaka progresa.

Napomene

- Ajtem nam, intuitivno, govori dokle smo stigli u prepoznavanju desne strane nekog pravila:
  - deo pre tačke je ono što se nalazi na vrhu steka
  - deo iza tačke je ono što je još potrebno da se prebaci na stek, da bismo mogli da izvršimo redukciju po tom pravilu
- Problem je što mi ne znamo unapred po kom pravilu ćemo izvršiti redukciju
- Zbog toga je potrebno paralelno održavati informaciju o napretku u svim pravilima za koja u datom trenutku to ima smisla
  - ovu informaciju o napretku možemo razumeti kao trenutno stanje
  - kako pravila ima konačno mnogo, imaćemo konačno mnogo različitih stanja
  - dodavanjem sledećeg simbola na stek, mi prelazimo u sledeće stanje
  - otuda, za opisivanje progresa u prepoznavanju desnih strana pravila tokom parsiranja možemo koristiti konačni automat nad $(\Sigma \cup N)^*$
  - ovaj konačni automat će nam omogućiti da formiramo tablice prelaska za parsiranje naviše

Konačni automat za $SLR(1)$ analizu

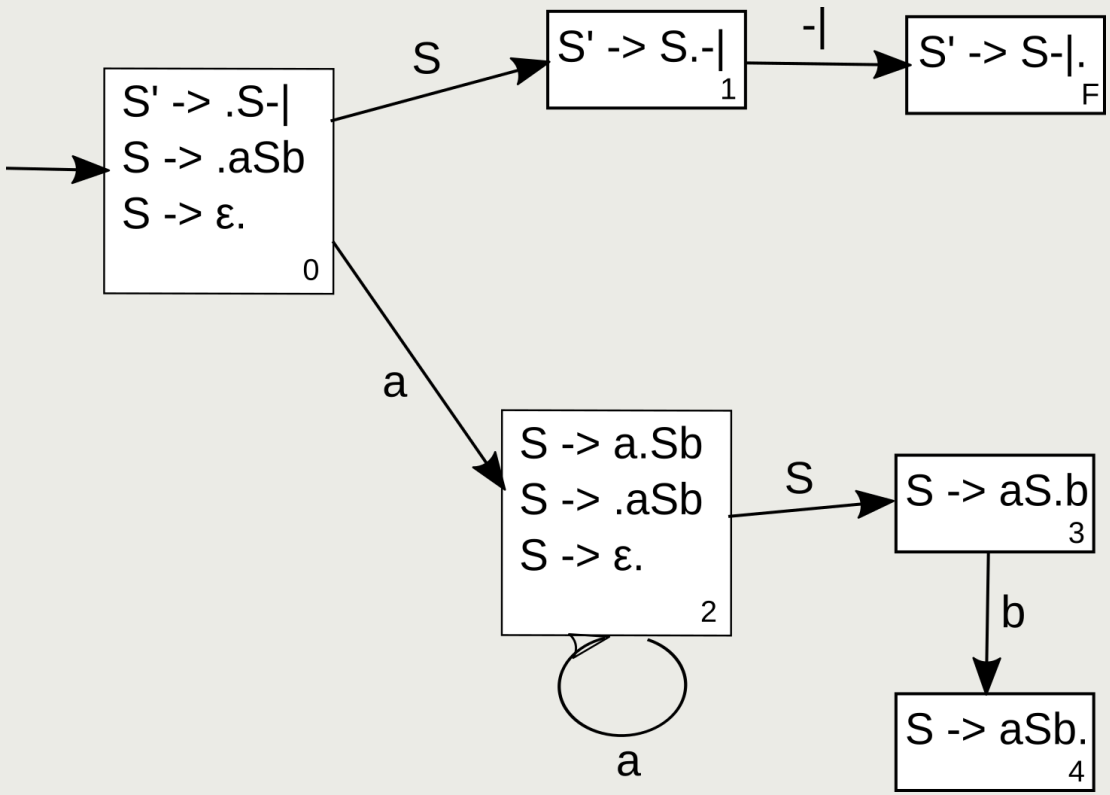
Konačni automat za $SLR(1)$ analizu

- Stanja ovog konačnog automata biće skupovi ajtema
  - ajtem $S' \longrightarrow .S \dashv$ naziva se početni ajtem
- princip zatvorenja: ako za neko $B \in N$ ajtem $A \longrightarrow \alpha.B\gamma$ pripada nekom stanju s, tada za svako pravilo $B \longrightarrow \beta$ gramatike, ajtem $B \longrightarrow .\beta$ takođe pripada s
- početno stanje automata je stanje koje nastaje primenom principa zatvorenja na početni ajtem
- princip prelaza: ako za neko $x \in (\Sigma \cup N \cup \{\dashv\})$ ajtem $A \longrightarrow \alpha.x\beta$ pripada nekom stanju s, tada ajtem $A \longrightarrow \alpha x.\beta$ pripada stanju u koje se prelazi iz s po simbolu x
- završno stanje je stanje koje sadrži ajtem $S' \longrightarrow S \dashv .$

Primer

Primer

Ponovo razmatramo gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$. Konačni automat za $SLR(1)$ analizu izgleda ovako:



Tablice prelaska

Tablica prelaska

- Tablica prelaska za $SLR(1)$ analizu (poznata i kao ACTION-GOTO tablica) se sastoji iz:
  - vrsta koja odgovaraju stanjima konačnog automata za $SLR(1)$ analizu
  - kolona koje odgovaraju terminalima iz $\Sigma \cup \{\dashv\}$ (ACTION deo tablice)
  - kolona koje odgovaraju neterminalima iz N (GOTO deo tablice)
- Označimo sa $T[s, X]$ vrednost u vrsti koja odgovara stanju s i koloni koja odgovara simbolu X:
  - ako u automatu postoji prelaz iz stanja s u stanje t po terminalu $a \in \Sigma \cup \{\dashv\}$, tada u polje $T[s, a]$ upisujemo akciju prebacivanja, u oznaci S_t
  - ako u automatu postoji prelaz iz stanja s u stanje t po neterminalu $A \in N$, tada u polje $T[s, A]$ unosimo akciju potiskivanja, u oznaci P_t
  - ako u stanju s postoji ajtem $A \longrightarrow \alpha.$, a simbol $a \in \Sigma \cup \{\dashv\}$ pripada skupu $Sledi(A)$, tada u polje $T[s, a]$ upisujemo akciju redukcije po pravilu $A \longrightarrow \alpha$, u oznaci R_i, gde je i redni broj pravila $A \longrightarrow \alpha$ u gramatici G

$SLR(1)$ gramatike

Konflikti

Ako, u skladu sa prethodnim algoritmom, u isto polje tabele treba da upišemo:

- i akciju prebacivanja i akciju redukcije, tada imamo konflikt prebacivanje-redukcija (engl. shift-reduce conflict)
- dve različite akcije redukcije, tada imamo konflikt redukcija-redukcija (engl. reduce-reduce conflict)

Definicija 12

Gramatika G je $SLR(1)$ gramatika ako u tablici prelaska formiranoj na prethodno opisan način nema konflikta. Jezik je $SLR(1)$ jezik ako postoji $SLR(1)$ gramatika koja ga generiše.

Napomene

- Može se pokazati da ovako definisan pojam $SLR(1)$ gramatika ne uključuje sve $LR(1)$ gramatike
- Takođe, postoje $LR(1)$ jezici koji nisu $SLR(1)$ jezici
- U praksi, $SLR(1)$ gramatike su dovoljne za opis većine programskih i drugih računarskih jezika

Primer

Primer

Vratimo se na prethodni primer i SLR(1) automat za gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$. *Numerišimo pravila proširene gramatike na sledeći način:*

0: $S' \longrightarrow S \dashv$
1: $S \longrightarrow aSb$
2: $S \longrightarrow \varepsilon$

Tablica prelaska koja odgovara dobijenom automatu je:

	a	b	$\dashv$	S
0	S_2	R_2	R_2	P_1
1	-	-	S_F	-
2	S_2	R_2	R_2	P_3
3	-	S_4	-	-
4	-	R_1	R_1	-

Kako nema konflikta (svako polje sadrži najviše po jednu akciju), sledi da je gramatika SLR(1).

Algoritam $SLR(1)$ parsiranja

Algoritam

Formiramo prošireni potisni automat na sledeći način:

- Azbuka steka Γ potisnog automata se sastoji iz uređenih parova (x, s) (koje ćemo označavati kraće sa x_s), gde je $x \in \Sigma \cup \{\dashv\} \cup N \cup \{\perp\}$, a s je stanje $SLR(1)$ konačnog automata. Pritom, početni simbol steka je par $(\perp, 0)$, gde je $\perp$ marker dna steka, a 0 je početno stanje $SLR(1)$ konačnog automata. Na početku rada se na ulazu nalazi niska $w \dashv$, gde je $w \in \Sigma^*$ reč koju parsiramo
- Neka je u nekom trenutku na vrhu steka x_s, a na ulazu $a \in \Sigma \cup \{\dashv\}$. Tada:
  - ako je $T[s, a] = S_t$, tada vršimo prebacivanje, tj. sa ulaza skidamo a i na vrh steka postavljamo a_t
  - ako je $T[s, a] = R_i$, tada vršimo akciju redukcije po pravilu $i : A \longrightarrow \gamma$:
    - skidamo sa steka $|\gamma|$ simbola, nakon čega na vrhu steka ostaje neko y_t
    - neka je $T[t, A] = P_{t'}$; na stek potiskujemo $A_{t'}$
  - aku u bilo kom trenutku imamo nedefinisanu vrednost u tablici, prijavljujemo sintaksnu grešku
  - kada se na vrhu steka nađe $\dashv_F$, tada prihvatamo pročitanu reč
    - formalno, u tom trenutku stek nije prazan, već sadrži $\perp_0 S_1 \dashv_F$, ali se to lako može rešiti dodavanjem specijalnog prelaza koji skida ova tri simbola sa steka, ili proglašavanjem ove konfiguracije za završnu; u praksi, to nije suštinski bitno
    - redosled redukcija u obrnutom poretku nam određuje pravila koja treba primeniti u najdešnjem izvođenju niske w

Primer

Primer

Vratimo se opet na gramatiku $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$. *Posmatrajmo nisku aabb. Prepoznavanje ove niske se može prikazati sledećom tablicom:*

Stek	*Ulaz*	*Primenjena akcija*
$\perp_0$	$aabb \dashv$	-
$\perp_0 a_2$	$abb \dashv$	S_2
$\perp_0 a_2 a_2$	$bb \dashv$	S_2
$\perp_0 a_2 a_2 S_3$	$bb \dashv$	R_2
$\perp_0 a_2 a_2 S_3 b_4$	$b \dashv$	S_4
$\perp_0 a_2 S_3$	$b \dashv$	R_1
$\perp_0 a_2 S_3 b_4$	$\dashv$	S_4
$\perp_0 S_1$	$\dashv$	R_1
$\perp_0 S_1 \dashv_F$	ε	S_F

Primer

Primer

Neka je data gramatika izraza:

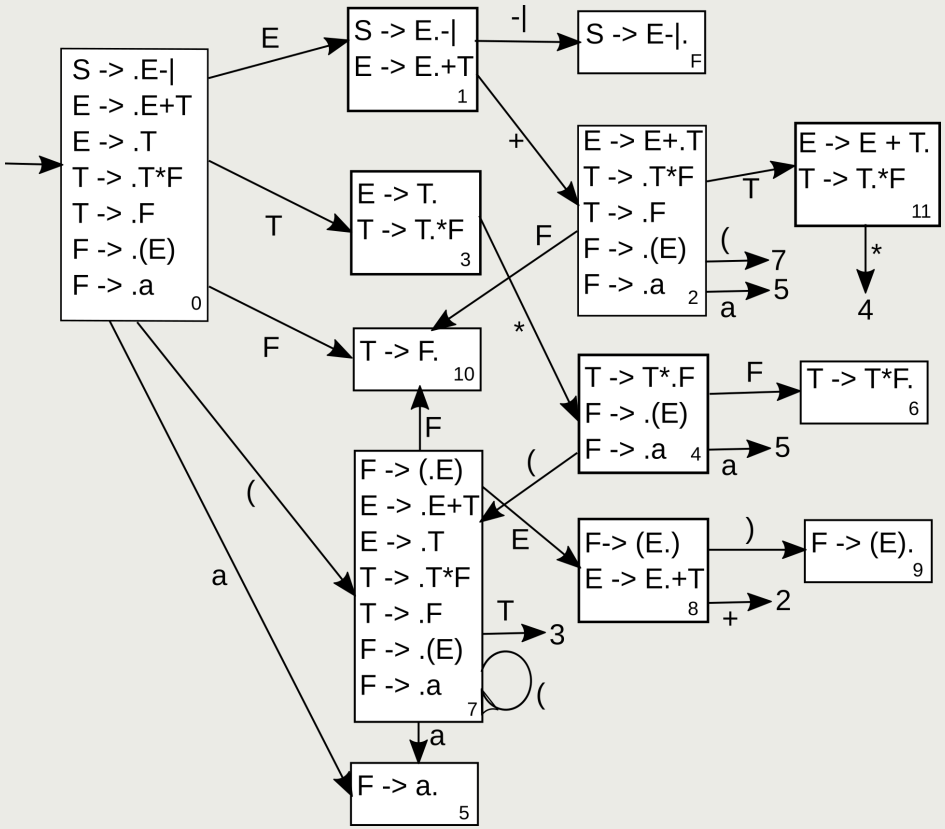
$$\begin{array}{lrcl} 1: & E & \longrightarrow & E + T \\ 2: & & | & T \\ 3: & T & \longrightarrow & T * F \\ 4: & & | & F \\ 5: & F & \longrightarrow & (E) \\ 6: & & | & a \end{array}$$

i reč $a + a * a$. Proširimo ovu gramatiku pravilom $S \longrightarrow E \dashv$, gde je S novi početni simbol. Ispitajmo da li je ova gramatika $SLR(1)$.

Primer

Primer

(nastavak) Automat za SLR(1) analizu izgleda ovako:



Primer

Primer

(nastavak) Setimo se skupova sledi za ovu gramatiku (sa slajda 31): $Sledi(E) = \{+,), \dashv\}$, $Sledi(T) = \{+,), \dashv, *\}$ *i* $Sledi(F) = \{+,), \dashv, *\}$
Imajući to u vidu, $SLR(1)$ *ACTION-GOTO tablica izgleda ovako:*

	$\dashv$	a	$+$	$*$	$($	$)$	E	T	F
0	-	S_5	-	-	S_7	-	P_1	P_3	P_{10}
1	S_F	-	S_2	-	-	-	-	-	-
2	-	S_5	-	-	S_7	-	-	P_{11}	P_{10}
3	R_2	-	R_2	S_4	-	R_2	-	-	-
4	-	S_5	-	-	S_7	-	-	-	P_6
5	R_6	-	R_6	R_6	-	R_6	-	-	-
6	R_3	-	R_3	R_3	-	R_3	-	-	-
7	-	S_5	-	-	S_7	-	P_8	P_3	P_{10}
8	-	-	S_2	-	-	S_9	-	-	-
9	R_5	-	R_5	R_5	-	R_5	-	-	-
10	R_4	-	R_4	R_4	-	R_4	-	-	-
11	R_1	-	R_1	S_4	-	R_1	-	-	-

Kako nema konflikata u tablici, gramatika je $SLR(1)$.

Primer

Primer

(nastavak) Simulacija prepoznavanja niske $a + a * a$ pomoću opisanog parsera data je sledećom tabelom:

Stek	*Ulaz*	*Primenjena akcija*
$\perp_0$	$a + a * a \dashv$	-
$\perp_0 a_5$	$+a * a \dashv$	S_5
$\perp_0 F_{10}$	$+a * a \dashv$	R_6
$\perp_0 T_3$	$+a * a \dashv$	R_4
$\perp_0 E_1$	$+a * a \dashv$	R_2
$\perp_0 E_1 +_2$	$a * a \dashv$	S_2
$\perp_0 E_1 +_2 a_5$	$*a \dashv$	S_5
$\perp_0 E_1 +_2 F_{10}$	$*a \dashv$	R_6
$\perp_0 E_1 +_2 T_{11}$	$*a \dashv$	R_4
$\perp_0 E_1 +_2 T_{11} *_4$	$a \dashv$	S_4
$\perp_0 E_1 +_2 T_{11} *_4 a_5$	$\dashv$	S_5
$\perp_0 E_1 +_2 T_{11} *_4 F_6$	$\dashv$	R_6
$\perp_0 E_1 +_2 T_{11}$	$\dashv$	R_3
$\perp_0 E_1$	$\dashv$	R_1
$\perp_0 E_1 \dashv_F$	ε	S_F

Primer

Primer

(nastavak) Pogledajmo šta bi se desilo kada bismo na ulazu prethodnog automata imali nisku $a*(a+(a+a)$ (primetimo da nedostaje jedna zagrada na kraju):

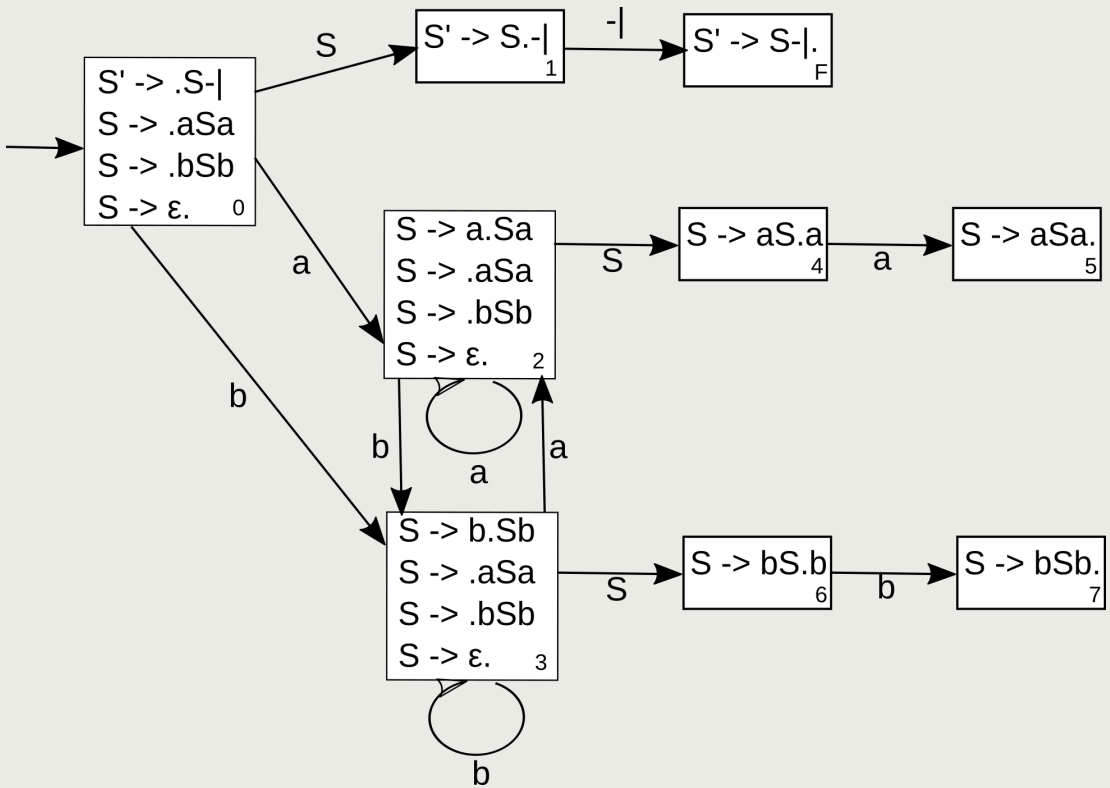
Stek	*Ulaz*	*Primenjena akcija*
$\perp_0$	$a*(a+(a+a)\dashv$	-
$\perp_0 a_5$	$*(a+(a+a)\dashv$	S_5
$\perp_0 F_{10}$	$*(a+(a+a)\dashv$	R_6
$\perp_0 T_3$	$*(a+(a+a)\dashv$	R_4
$\perp_0 T_3 *_4$	$(a+(a+a)\dashv$	S_4
$\perp_0 T_3 *_4 (_7$	$a+(a+a)\dashv$	S_7
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 a_5$	$+(a+a)\dashv$	S_5
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 F_{10}$	$+(a+a)\dashv$	R_6
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 T_3$	$+(a+a)\dashv$	R_4
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8$	$+(a+a)\dashv$	R_2
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2$	$(a+a)\dashv$	S_2
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7$	$a+a)\dashv$	S_7
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 a_5$	$+a)\dashv$	S_5
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 F_{10}$	$+a)\dashv$	R_6
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 T_3$	$+a)\dashv$	R_4
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8$	$+a)\dashv$	R_2
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8 +_2$	$a)\dashv$	S_2
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8 +_2 a_5$	$)\dashv$	S_5
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8 +_2 F_{10}$	$)\dashv$	R_6
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8 +_2 T_{11}$	$)\dashv$	R_4
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8$	$)\dashv$	R_1
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 (_7 E_8)_9$	$\dashv$	S_9
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 F_{10}$	$\dashv$	R_5
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8 +_2 T_{11}$	$\dashv$	R_4
$\perp_0 T_3 *_4 (_7 E_8$	$\dashv$	R_1

Sada za stanje 8 i simbol $\dashv$ ne postoji prelaz u tablici, tako da na ovom mestu sintaksni analizator prijavljuje grešku.

Primer

Primer

Posmatrajmo gramatiku $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon$. *Konačni automat za SLR*(1) *analizu dat je na slici:*



Primer

Primer

(nastavak) S obzirom da je $Prvi(S) = \{a, b\}$, *a* $Sledi(S) = \{\dashv, a, b\}$, *tablica prelaska za* $SLR(1)$ *analizu (ACTION-GOTO tablica) izgleda ovako:*

	a	b	$\dashv$	S
0	S_2/R_3	S_3/R_3	R_3	P_1
1	-	-	S_F	-
2	S_2/R_3	S_3/R_3	R_3	P_4
3	S_2/R_3	S_3/R_3	R_3	P_6
4	S_5	-	-	-
5	R_1	R_1	R_1	-
6	-	S_7	-	-
7	R_2	R_2	R_2	-

Dakle, vidimo da postoje konflikti prebacivanje-redukcija u poljima $T[0, a]$, $T[0, b]$, $T[2, a]$, $T[2, b]$, $T[3, a]$ *i* $T[3, b]$. *Otuda, gramatika nije* $SLR(1)$.

Višeznačne gramatike

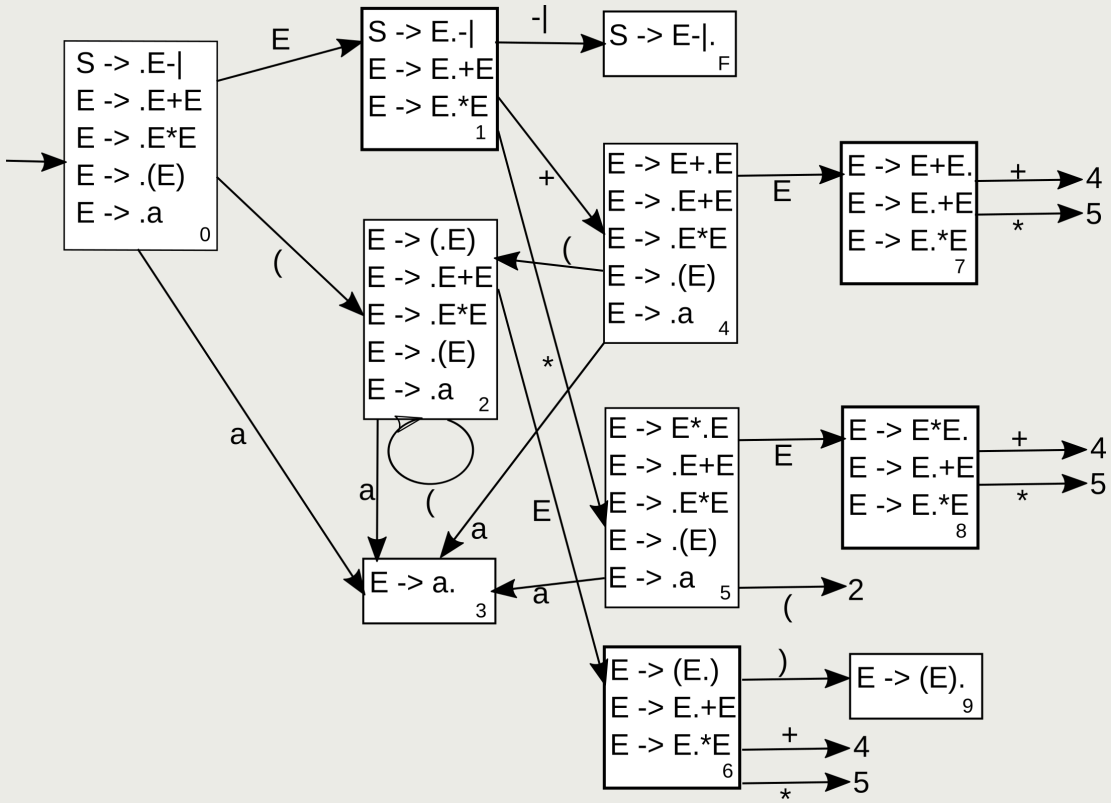
Više značne gramatike

- Višeznačne gramatike nisu $LR(1)$, s obzirom da izvođenje nadesno ne mora biti jedinstveno
- Otuda bi primena opisanog postupka za formiranje $SLR(1)$ parsera definitivno vodila ka pojavi konflikata u tablici prelaska
- Ipak, to ne znači da se alati za analizu naviše ne mogu koristiti za parsiranje višeznačnih gramatika:
  - višeznačnosti se tipično javljaju kao posledica nerazrešenih prioriteta i asocijativnosti
  - većina alata ostavlja mogućnost da se prioriteti i asocijativnosti navedu eksplicitno
  - ove informacije se mogu koristiti pri pojavi konflikta, kako bi se donela odluka o sledećem koraku

Primer

Primer

Posmatrajmo višeznačnu gramatiku izraza $E \longrightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$. *Automat za* $SLR(1)$ *analizu dat je na sledećoj slici:*



Primer

Primer

(nastavak) S obzirom da je $Prvi(E) = \{(, a\}$ *i* $Sledi(E) = \{\dashv, +, *,)\}$*, imamo sledeću tablicu prelaska:*

	a	$+$	$*$	$($	$)$	$\dashv$	E
0	S_3	-	-	S_2	-	-	P_1
1	-	S_4	S_5	-	-	S_F	-
2	S_3	-	-	S_2	-	-	P_6
3	-	R_4	R_4	-	R_4	R_4	-
4	S_3	-	-	S_2	-	-	P_7
5	S_3	-	-	S_2	-	-	P_8
6	-	S_4	S_5	-	S_9	-	-
7	-	S_4/R_1	S_5/R_1	-	R_1	R_1	-
8	-	S_4/R_2	S_5/R_2	-	R_2	R_2	-
9	-	R_3	R_3	-	R_3	R_3	-

Tablica, očekivano, sadrži konflikte.

Primer

Primer

(nastavak) Konflikti koji postoje u tablici su posledica nedefinisanih prioriteta i asocijativnosti i mogu se razrešiti eksplicitnim navođenjem:

- *konflikt u polju $T[7, +]$ je posledica nedefinisane asocijativnosti operatora $+$:*
  - *ako želimo levu asocijativnost, daćemo prednost redukciji*
  - *ako želimo desnu asocijativnost, daćemo prednost prebacivanju*
- *konflikt u polju $T[7, *]$ je posledica nedefinisanih prioriteta operatora:*
  - *ako želimo da operator $*$ ima viši prioritet, daćemo prednost prebacivanju*
  - *ako želimo da operator $+$ ima viši prioritet, daćemo prednost redukciji*
- *konflikt u polju $T[8, +]$ je posledica nedefinisanih prioriteta operatora:*
  - *ako želimo da operator $*$ ima viši prioritet, daćemo prednost redukciji*
  - *ako želimo da operator $+$ ima viši prioritet, daćemo prednost prebacivanju*
- *konflikt u polju $T[8, *]$ je posledica nedefinisane asocijativnosti operatora $*$:*
  - *ako želimo levu asocijativnost, daćemo prednost redukciji*
  - *ako želimo desnu asocijativnost, daćemo prednost prebacivanju*

Asocijativnost i prioritet u YACC-u

Zadavanje prioriteta i asocijativnosti u YACC-u

Alat YACC (i njegova slobodna varijanta Bison) podržava eksplicitno definisanje prioriteta i asocijativnosti operatora:

- Direktiva `%left '+'` označava levu asocijativnost operatora $+$
- Direktiva `%right '+'` označava desnu asocijativnost operatora $+$

Prioriteti se definišu redosledom navođenja ovih direktiva:

- operatori uvedeni ranije imaju niži prioritet
- operatori uvedeni kasnije imaju viši prioritet

Direktive `%left` i `%right` se navode pre gramatike, u odeljku u kome se definišu tokeni (koriste se umesto direktive `%token` kojom se definišu tokeni koji nemaju asocijativnost).

Primer

U prethodnom primeru, ako želimo da oba operatora imaju levu asocijativnost, a da operator $*$ ima viši prioritet, u YACC-u ćemo navesti:

```
%left '+'
%left '*'
```

$LR(1)$ i $SLR(1)$

$LR(1)$ i $SLR(1)$, ponovo

- Prilikom formiranja konačnog automata za $SLR(1)$ analizu uopšte nismo uzimali u obzir preduvidne simbole, već su stanja formirana isključivo na osnovu pravila gramatike:
  - zbog toga se konačni automat za $SLR(1)$ analizu u literaturi često naziva i $LR(0)$-automat, a ajtemi ovog automata i $LR(0)$-ajtemi
- Konflikti između prebacivanja i redukcije su rešavani pomoću skupova *Sledi*:
  - ispostavi se da je ovo prilično gruba aproksimacija onoga što se zaista dešava prilikom parsiranja, jer je skup preduvidnih simbola za koje je potrebno vršiti redukciju po pravilu $A \longrightarrow \gamma$ obično neki podskup skupa $Sledi(A)$
  - na žalost, ovaj podskup nije moguće odrediti nakon što se formira automat, već se informacije o ovim skupovima moraju održavati tokom formiranja automata

$LR(1)$ i $SLR(1)$

$LR(1)$ ajtemi

- $LR(1)$ ajtem: ajtem oblika $A \longrightarrow \alpha.\beta(F)$ čije je značenje ,,prepoznali smo α, ostaje još da prepoznamo β, nakon čega možemo vršiti redukciju po ovom pravilu ukoliko je na ulazu neko $a \in F \subseteq \Sigma$".
- Skup preduvida F se formira na osnovu dopunjenog principa zatvorenja: ako u stanju s imamo ajtem $A \longrightarrow \alpha.B\beta(F)$, gde je $B \in N$, tada u stanje s treba dodati i ajtem $B \longrightarrow .\gamma(Prvi(\beta))$ (odnosno $B \longrightarrow .\gamma(Prvi(\beta) \cup F)$ ako je β anulirajuće), za svako B-pravilo gramatike
- Početni ajtem je sada $S' \longrightarrow .S \dashv (\{\})$
- Dva $LR(1)$ ajtema su različita ako su im skupovi preduvida različiti, čak i ako su inače isti (kao $LR(0)$ ajtemi)
  - zbog toga će skup stanja $LR(1)$ automata biti značajno veći nego kod $SLR(1)$ automata
  - ipak, finija analiza mogućih preduvida omogućava razrešavanje nekih konflikata koji kod $SLR(1)$ analize ostaju nerazrešeni
- Primer pogledati u knjizi profesora Vitasa

VAŽNA NAPOMENA

U slučaju kanonskog $LR(1)$ parsera, jedino je postupak formiranja tablica prelaska složeniji (zbog većeg broja stanja $LR(1)$ konačnog automata) – jednom kada ove tablice odredimo, algoritam parsiranja je potpuno isti kao i kod $SLR(1)$ analize (algoritam na slajdu 57).